MATHEMATIQ

Der Newsletter der MathSIG
(Interessensgruppe innerhalb der Mensa Österreich)

Ausgabe 8

http://www.hugi.scene.org/adok/mensa/mathsig/

Editorial

Liebe Leserinnen und Leser!

Dies ist die achte Ausgabe von MATHEMATIQ, dem Newsletter der MathSIG. Die MathSIG wurde gegründet, um die spezifischen Interessen mathematisch hochbegabter Menschen zu fördern. In erster Linie soll sie sich also den Themengebieten Mathematik, Informatik, Physik und Philosophie widmen. Beiträge von Lesern sind herzlich willkommen. Wenn in ihnen mathematische Sonderzeichen vorkommen, bitte ich aber, sie zwecks möglichst einfacher und fehlerfreier Formatierung im TeX-Format einzusenden. Als Vorlage ist eine Fassung des jeweils aktuellen Newsletters im TeX-Format auf Anfrage bei mir erhältlich. Außer Artikeln sind natürlich auch Illustrationen für das Titelblatt willkommen. Die Rechte an diesen müssen aber eindeutig bei euch selbst liegen, Kopieren von Bildern aus dem Internet ist nicht erlaubt.

Da es unlängst ein Missverständnis gegeben hat: Für alle Beiträge in MATHEMATIQ sind die jeweiligen Autoren selbst verantwortlich. Der Verein Mensa ist keinesfalls für die Inhalte von MATHEMATIQ zur Verantwortung zu ziehen.

Diese Ausgabe ist ein Sonderfall. Die Ausgaben 6 und 7 mussten nämlich zurückgezogen werden, weil sie sich mit einigen Thesen eines Hobby-Physikers beschäftigten, die er in öffentlich zugänglichen Internet-Foren gepostet hat. Es stellte sich heraus, dass es diesem Mann nicht recht war, dass seine Thesen hier in MATHEMATIQ kommentiert wurden. Ich entschied mich daher, diese beiden Ausgaben zu löschen und statt dessen eine neue Ausgabe, eben diese Ausgabe 8, zu veröffentlichen, in der die übrigen, unstrittigen Artikel aus den entfernten Ausgaben zusammengefasst sind. Ich möchte mich bei dem Hobby-Physiker entschuldigen, dass ich gewagt habe, über seine in diversen Internet-Foren veröffentlichten Thesen zu diskutieren; an seiner Stelle hätte ich mich freilich darüber gefreut, dass mir so viel Beachtung geschenkt wird.

In diesem Sinne: Viel Spaß beim Lesen und Lernen!

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Buchvorstellung

In der Buchhandlung INTU habe ich vor kurzem ein neues Lehrbuch der Mathematik entdeckt. Es ist im Springer-Verlag erschienen und nennt sich "Grundwissen Mathematikstudium - Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen". Zahlreiche Autoren sind an diesem Buch beteiligt, unter anderem Tilo Arens und TU-Wien-Professor Hellmuth Stachel. Das Buch hat einen Umfang von fast 1200 Seiten und erinnert in dieser Hinsicht an ein medizinisches Lehrbuch.

Ich kann dieses Buch nur jedem empfehlen, der sich für Mathematik auf Hochschulniveau interessiert und noch nicht allwissend auf diesem Gebiet ist. Das Buch ist didaktisch hervorragend aufgebaut, alles ist leicht verständlich und nachvollziehbar erklärt; es gibt zahlreiche Exkurse zur Geschichte der Mathematik und zu konkreten Problemen. Man lernt, wie ein Mathematiker zu denken, wenn man dieses Buch liest. Sehr reizvoll ist auch, dass die beiden Gebiete der Analysis und der Linearen Algebra, die im Mathematikstudium getrennt behandelt werden, in diesem Buch ineinander verwoben sind, so dass die Zusammenhänge und Gemeinsamkeiten klar hervortreten.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Zum P-NP-Problem

Immer wieder werden "Beweise" veröffentlicht, die entweder in die eine oder in die andere Richtung gehen. Von der Fachwelt werden die meisten gar nicht mehr ernst genommen. Das liegt daran, dass es leider auch sehr viel Arbeit ist, einen Beweis logisch zu überprüfen, um eventuelle Fehler zu finden. Interessant finde ich persönlich aber, dass es auch Beweisversuche gibt, die behaupten, das *P*-*NP*-Problem wäre unlösbar. Was ist da dran?

Zunächst ist das *P*-*NP*-Problem nicht unentscheidbar, weil es sich ja nicht um ein Entscheidungsproblem handelt. Paper, die das *P*-*NP*-Problem als unentscheidbar bezeichnen, sind daher schon aus diesem Grund fragwürdig.

Man könnte aber untersuchen, ob ein verwandtes Entscheidungsproblem entscheidbar ist. Dieses Entscheidungsproblem bezeichne ich als die Menge $NP \setminus P$. Es ist mit dem *P*-*NP*-Problem insofern verwandt, als P genau dann gleich NP ist, wenn $NP \setminus P$ gleich der leeren Menge ist. Man kann sich nun Gedanken darüber machen, ob die Menge $NP \setminus P$ entscheidbar ist. Zur Lösung des *P*-*NP*-Problems bringt es meiner Ansicht nach nicht viel. Was würde es denn implizieren, wenn $NP \setminus P$ entscheidbar sein sollte, und was, wenn $NP \setminus P$ unentscheidbar sein sollte? Meiner Meinung nach gar nichts. Auch wenn $NP \setminus P$ unentscheidbar sein sollte, könnte es grundsätzlich möglich sein, das *P*-*NP*-Problem zu lösen. Wenn $NP \setminus P$ entscheidbar wäre, dann würde das alleine auch noch nicht das *P*-*NP*-Problem lösen. So gesehen, ist die Frage der Entscheidbarkeit der Menge $NP \setminus P$ eine reine Übungsaufgabe ohne Relevanz für das eigentliche Problem. Ich lade aber gerne ein, sich an dieser Übungsaufgabe zu versuchen. Meiner Meinung nach ist $NP \setminus P$ unentscheidbar. Die Begründung, also Lösung der Übungsaufgabe, bringe ich auf der nächsten Seite.

Lösung der Übungsaufgabe

Ein Turing-Entscheider mag vielleicht in vielen Fällen in der Lage sein zu bestimmen, ob ein Problem in der Menge *NP* liegt, aber nicht in allen Fällen. Damit ein Problem in *NP* sein kann, muss es mindestens einen Algorithmus geben, der die Gültigkeit einer Lösung überprüft und für beliebig große Eingabedaten in polynomieller Zeit abläuft. Da scheint es schon grundsätzlich schwierig zu sein, den Grenzwert dieser Laufzeit zu ermitteln. Wenn man auch feststellen kann, dass sich die Laufzeiten bei relativ großen Instanzen polynomiell verhalten, wie soll man sagen können, dass sie sich auch bei noch größeren Instanzen so verhalten werden? Zudem könnten manche Algorithmen bei allen Eingabedaten ab einer bestimmten Größe in Endlosschleifen geraten. In diesem Fall wäre die Ermittlung der Komplexität auf das Halteproblem reduzierbar, welches bekanntlich unentscheidbar ist.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Was sollten Hochbegabte studieren?

Als ich neulich mit einem Juristen zu tun hatte, dachte ich mir, dass Jus eigentlich gar kein so schlechtes Studium sein könne, weil man damit immerhin viel Geld verdienen könne. Dass ich aber so denke, hat mit meinem Alter zu tun - ich bin jetzt 29 und habe, so gesehen, andere Interessen, als ich noch mit 17 hatte, als ich meine Studienwahl treffen musste. Mit 17 hatte ich noch einen enormen Wissensdurst und vor allem den Drang, komplizierte, geistig anspruchsvolle Aufgaben zu lösen - Bedürfnisse, die ein Jus-Studium vermutlich weniger befriedigt hätte.

MATHEMATIQ beschäftigt sich mit Mathematik, Informatik, Physik und Philosophie. Sind das die Studienrichtungen, die für mathematisch hochbegabte Heranwachsende am besten geeignet sind? Wäre es als eine Talentverschwendung zu betrachten, wenn ein mathematisch Hochbegabter etwas anderes studierte?

Letzteres würde ich verneinen. Der Arbeitsmarkt schreit nicht nach Mathematikern oder Physikern. Auch der in den Medien oft postulierte "Fachkräftemangel" ist meiner Meinung nach eine Illusion. Damit versuchen die Medien nur die Menschen zu manipulieren. Die Realität sieht oft anders aus, als es von den Medien dargestellt wird.

Freilich haben aber andere Studienrichtungen auch andere Anforderungen, die jemand mit einer rein mathematischen Begabung nicht unbedingt erfüllen mag. Medizin sollte beispielsweise in meinen Augen nur derjenige studieren, der wirklich Interesse am Fach, ein sehr gutes Gedächtnis und viel Ausdauer und Fleiß mitbringt.

Kann man eine mathematische Begabung als Mediziner verwerten? Nur in sehr geringem Ausmaß. In der Pharmakologie werden manchmal Dosis-Wirkungs-Kurven analysiert; dafür braucht man Grundkenntnisse der Differential- und Integralrechnung. In der Physiologie kommen einige Gleichungen vor, unter anderem bei der Ausrechnung des Membranpotenzials. Das wäre aber auch schon fast alles. Gewiss, manchmal muss man auch im klinischen Alltag Lösungen verdünnen und dazu zu mischende Volumina ausrechnen, aber das ist ja eher trivial - dazu muss man nicht mathematisch hochbegabt sein. So gesehen, ist es ziemlich sinnlos, sich für ein Medizinstudium zu entscheiden, weil man glaubt, als mathematisch Hochbegabter aus der Masse herauszustechen und auf diese Weise irgendeinen Vorteil gegenüber seinen Kollegen zu haben.

Was die Mathematik an sich betrifft, würde ich gerne aus einem Artikel zitieren, den ich vor kurzem in meinem Blog veröffentlicht habe:

"Hinzu kommt meiner Meinung nach, dass das Beweisen einer mathematischen Vermutung zwar eine anerkennenswerte intellektuelle Leistung ist, doch ein solcher Beweis fast immer völlig nutzlos ist! Denn diese Vermutungen, die oft Jahrhunderte eines Beweises harrten, haben entweder keine (offensichtliche) praktische Anwendbarkeit, oder aber sie wurden bereits in der Praxis angewendet, ohne bewiesen worden zu sein. Der Beweis ist im Prinzip Formsache. Da geht es allenfalls um die endgültige Begründung, warum eine Formel richtig sein muss. Einen realen Unterschied macht es aber nicht, ob eine Formel unbewiesen ist, sich aber im praktischen Leben bewährt hat, oder ob man den Beweis kennt. So ist auch das *P*-*NP*-Problem zu betrachten.

Man sieht das ja auch in der Medizin. Da wird im täglichen Leben, im Berufsalltag eines Arztes, ständig mit Annahmen gearbeitet, die nicht endgültig bewiesen worden sind, ja möglicherweise gar nicht bewiesen werden können. Und trotzdem erzielt die Medizin Heilerfolge. Nicht zuletzt sagt man auch: 'Wer heilt, hat Recht.' In der Praxis genügt es, mit Hypothesen zu arbeiten; wenn sich diese Hypothesen erhärten, ist es gut, wenn nicht, müssen sie verworfen werden.

Es ist unendlich schwieriger, eine All-Aussage zu beweisen, als sie zu widerlegen. Natürlich ist es eine besondere geistige Leistung, wenn es gelingt, eine Vermutung zu beweisen. Aber notwendig ist das nicht."

Insofern relativiert sich die Ansicht, mathematisch Hochbegabte sollten unbedingt etwas aus ihrer Begabung machen.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Kategorientheorie und Koalgebra

In den vergangenen Ausgaben von MATHEMATIQ habe ich mich vor allem mit Theoretischer Informatik beschäftigt. Nun gibt es noch eine weitere Abstraktionsebene: Man kann nämlich Konzepte der Theoretischen Informatik, wie Datenstrukturen, auch mathematisch modellieren. Das ist aber Sache eines studierten Mathematikers und nicht eines Informatikers. Dem reinen Informatiker fehlt dazu das notwendige Rüstzeug, das er in einem Mathematikstudium erworben hätte. Außer, er hat die Muße, das Versäumte im Selbststudium nachzulernen.

Zwei Konzepte, die bei der mathematischen Modellierung von Datenstrukturen und ähnlichen Dingen eine Rolle spielen, sind jedenfalls die Kategorientheorie und die Koalgebra. Dabei handelt es sich bei der Kategorientheorie um eine Verallgemeinerung der Mengenlehre. Die Koalgebra wird an Universitäten oft auf der Kategorientheorie aufbauend gelehrt, auch wenn sie im Prinzip auch ohne Konzepte der Kategorientheorie definiert werden kann, und stellt einen zu der Algebra (einem Teilbereich der Mathematik) dualen Formalismus dar. Das heißt, zu jeder Algebra gibt es auch eine Koalgebra und umgekehrt. Manchen wird vielleicht schon die Formulierung "eine Algebra" Kopfzerbrechen bereiten, kennt er doch nur "die Algebra". Das unterscheidet eben den Laien vom studierten Mathematiker - der Laie hat sich höchstens mit Linearer Algebra beschäftigt und glaubt womöglich, dies wäre die einzige Algebra, aber der Mathematiker weiß, dass es viele verschiedene Algebren gibt; in seinen Vorlesungen lernt er, wie man Algebren allgemein beschreibt. Nun lassen sich manche Konzepte der Informatik eben durch Algebren beschreiben, aber andere harrten lange Zeit einer solchen Beschreibung und bereiteten den Mathematikern entsprechend Kopfzerbrechen. Und da kommt eben die Koalgebra ins Spiel. Dabei ist zu sagen, dass die Dinge, die neuerdings mit Hilfe der Koalgebra modelliert werden, früher durch Automaten dargestellt wurden. Es ist insofern nicht ganz korrekt zu sagen, die Koalgebra sei eine Verallgemeinerung der Automatentheorie, ich würde sie eher als einen alternativen Ansatz zur Beschreibung von Dingen bezeichnen, die auch durch Automaten modelliert werden können. Theoretische Informatiker wie ich, die von Automatentheorie recht viel Ahnung, von Koalgebra aber wenig Ahnung haben (ich gebe es zu), mögen vielleicht dazu neigen, die Koalgebraiker als Konkurrenten zu betrachten. Aber im Moment sieht es jedenfalls nicht danach aus, als ob die Automatentheorie durch die Koalgebra abgelöst würde. Überhaupt scheint die Koalgebra noch ein Gebiet zu sein, in dem sich nur wenige wirklich auskennen - man findet im Internet etwa eine niederländische Arbeitsgruppe, die auf diesem Gebiet recht viel publiziert hat, und die Vortragende an der TU Wien, die hier eine Vorlesung über Koalgebra gehalten hat, hat nicht zufälligerweise eben dort, in den Niederlanden, ihr Doktorat gemacht. Die Gemeinschaft der Koalgebraiker scheint also insgesamt noch recht klein zu sein. Aber vielleicht ist das für den einen oder anderen gerade deswegen interessant, um eventuell Karriere zu machen.

Ein relativ gutes Tutorial zur Koalgebra kann hier gefunden werden:
`http://www.cs.ru.nl/B.Jacobs/PAPERS/JR.pdf`

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com