# Eine Einführung in die Logik

Schon seit Jahrhunderten beschäftigen sich Menschen mit Logik. Die alten Griechen und nach ihnen mittelalterliche Gelehrte versuchten, Listen mit Regeln zu entwickeln, welche logischen Schlüsse zulässig sind und welche nicht. Das früheste bekannte Beispiel dafür sind die Aristotelischen Syllogismen. Die mittelalterlichen Gelehrten griffen das Vermächtnis des Aristoteles auf und benannten diese Syllogismen mit Merkworten. Beispielsweise stand "Modus Barbara" für einen logischen Schluss der Bauart: "Wenn alle x y sind und alle y z, dann sind alle x z."

Aus Sicht einer Person, die für das logische Denken begabt ist, muten diese Versuche, Logik in eine Form zu gießen, die man auswendig lernen kann, umständlich an, weil wir in der Lage sind, leicht selbst zu überprüfen, ob ein Gedankengang wohlgeformt und gültig ist.

Ab dem 18. Jahrhundert fing die moderne mathematische Logik an sich zu entwickeln. Pioniere waren unter anderem George Boole (dessen Boolesche Algebra jedem Programmierer ein Begriff sein sollte), Gottlob Frege und Bertrand Russell. Diese "klassische" Logik ist inzwischen gut erforscht, aber es gibt daneben auch Erweiterungen, etwa um modale oder temporale Konzepte, sowie alternative Ansätze, die mit der klassischen Logik nicht kompatibel sind. Einige von ihnen werde ich in diesem Artikel vorstellen.

## Klassische Aussagenlogik

Klassische Aussagenlogik ist die in der Praxis wichtigste Form der Logik. Ihre Sprache gestattet es, Aussagen wie "Wenn Behauptung A wahr ist und Behauptung B falsch, dann ist Behauptung C wahr" zu formulieren.

In der klassischen Logik ist jede Behauptung entweder wahr oder falsch. Es gibt keine dritte Möglichkeit. Wenn nicht bekannt ist, ob eine Aussage wahr ist, können wir mit ihr nicht arbeiten.

Beim Programmieren werden meistens nur Kenntnisse der klassischen Aussagenlogik benötigt. Es gibt verschiedene logische Operatoren, die verwendet werden können, um Schlüsse zu ziehen. Die grundlegendsten sind Negation, Konjunktion und Disjunktion.

Es gibt in der Logik verschiedene Notationen. Eine gängige Notation für die Negation ist $\neg a$. Die Semantik ist einfach: Wenn eine Aussage wahr ist, ist ihre Negation falsch, und wenn eine Aussage falsch ist, ist ihre Negation wahr.

Konjunktion wird gewöhnlich als $a \wedge b$ ausgedrückt und Disjunktion als $a \vee b$. Die Semantik der Konjunktion: Das logische Produkt ist genau dann wahr, wenn beide Parameter wahr sind. Die logische Summe der Disjunktion ist im Unterschied dazu genau dann falsch, wenn beide Parameter falsch sind. (Wenn man sagt, eine Aussage $a$ sei genau dann wahr, wenn auch eine Aussage $b$ wahr sei, bedeutet dies: Wenn $a$ wahr ist, ist $b$ wahr, und wenn $b$ wahr ist, ist auch $a$ wahr. Analog verhält es sich, wenn man sagt, eine Aussage $a$ sei genau dann falsch, wenn eine Aussage $b$ wahr sei.)

Ein anderer weit verbreiteter Operator ist die Implikation, man schreibt $a \rightarrow b$ und meint "a impliziert b". Die Bedeutung: Wenn a wahr ist, muss auch b wahr sein. Das impliziert, dass, wenn a falsch ist, der Wert von b entweder wahr oder falsch sein kann. Implikation kann leicht durch Disjunktion und Negation ausgedrückt werden: $a \rightarrow b$ ist äquivalent zu $\neg a \vee b$.

Der letzte weit verbreitete Operator ist logische Äquivalenz. Die Aussagen $a$ und $b$ sind zueinander genau dann äquivalent, wenn entweder beide wahr oder beide falsch sind. Wir werden Äquivalenz durch $a \equiv b$ ausdrücken.

In der Elektrotechnik werden oft auch die Operatoren NAND und NOR verwendet. Die Bedeutung: $\neg(a \wedge b)$ bzw. $\neg(a \vee b)$. Diese Operatoren sind für die Entwicklung von Schaltkreisen nützlich, weil man Konjunktion, Disjunktion und Negation leicht durch sie ausdrücken und man so Produktionskosten sparen kann. Es sei dem geneigten Leser als übungsaufgabe überlassen herauszufinden, wie Konjunktion, Disjunktion und Negation durch NAND oder NOR ausgedrückt werden können.

Die Boolesche Algebra kennt auch einige Gesetze, die benutzt werden können, um logische Ausdrücke umzuwandeln oder zu vereinfachen, beispielsweise die De Morganschen Gesetze $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ und $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ sowie die Distributivgesetze $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ und $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

## Prädikatenlogik

Die berühmte Aussage "Alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch, daher ist Sokrates sterblich" kann nicht mit Aussagenlogik ausgedrückt werden. Man benötigt eine Erweiterung ihrer Syntax zur Prädikatenlogik erster Ordnung. Wenn man $S$ und $M$ als Prädikate definiert und $k$ für Sokrates steht, kann man im Prinzip schreiben: "Alle $x$, für die gilt $M(x)$, haben die Eigenschaft $S(x)$, $M(k)$, daher $S(k)$." Formal würde man das folgendermaßen ausdrücken:

$((\forall x M(x) \rightarrow S(x)) \wedge M(k)) \rightarrow S(k)$

Diese Art zu schließen wird übrigens auch *modus ponens* genannt. $\forall$ ist hierbei das so genannte Allquantor-Symbol. $\forall x P(x)$ bedeutet: Was auch immer $x$ ist, es gilt $P(x)$. In Analogie dazu bedeutet $\forall x M(x) \rightarrow S(x)$: Was auch immer $x$ ist, wenn $M(x)$, dann $S(x)$.

Neben dem Allquantor $\forall$ kennt die Prädikatenlogik auch den Existenzquantor $\exists$. $\exists x P(x)$ bedeutet, dass es mindestens ein $x$ gibt, für das $P(x)$ gilt. Die beiden

Quantoren stehen miteinander in folgendem Zusammenhang:

$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
$\exists x \neg P(x) \equiv \neg\forall x P(x)$

Es gibt neben der Prädikatenlogik erster Ordnung Erweiterungen, die man Prädikatenlogik höherer Ordnungen nennt. Die Prädikatenlogik zweiter Ordnung erlaubt es etwa, Prädikate selbst zu quantifizieren. Dadurch wird es möglich, Aussagen wie die folgenden zu formulieren:

$\exists P P(x) \wedge \neg P(y)$

Das bedeutet, dass es ein Prädikat $P$ gibt, für welches gilt $P(x)$, aber nicht $P(y)$.

## Modallogiken

Ein fortgeschrittenes Thema der Logik sind die Modallogiken. Ich verwende die Mehrzahl, weil es viele Arten davon gibt. Allen ist gemeinsam, dass sie von Möglichkeiten handeln, und die meisten werden durch die Kripke-Semantik definiert. Die Kripke-Semantik geht davon aus, dass es verschiedene Welten gibt. Da Modallogiken Erweiterungen der klassischen Logik sind, kann jede Formel der klassischen Logik auch in einer Modallogik verwendet werden. Schreibt man die Formel nur so hin, bedeutet dies, dass die Aussage sich auf die aktuelle Welt bezieht. Schreibt man hingegen eine Aussage der Form $\Diamond P(x)$, so bedeutet dies, dass $P(x)$ möglich ist, das heißt, es gibt einen Übergang von der aktuellen Welt zu einer anderen Welt, in der $P(x)$ gültig ist. Man kann auch sagen, die aktuelle Welt stehe mit einer anderen Welt, in der die genannte Formel gültig ist, in Beziehung (Relation).

Ferner gibt es den Operator $\Box$: $\Box P(x)$ hat die Bedeutung, dass es keinen Übergang von der aktuellen Welt zu einer anderen Welt gibt, in der P(x) ungültig ist, P(x) ist also in allen Welten, zu denen es einen Übergang von der aktuellen Welt gibt, gültig. Die beiden Operatoren stehen zueinander in folgender Beziehung:

$\Diamond P(x) \equiv \neg\Box\neg P(x)$
$\neg\Diamond\neg P(x) \equiv \Box P(x)$

## Intuitionistische Logiken

Intuitionistische Logiken stellen eine Alternative zur klassischen Logik dar, die zu dieser *nicht* kompatibel ist. Der Unterschied: Während in der klassischen Logik die Formel $x$ bedeutet, dass die Aussage $x$ wahr ist, und die Formel $\neg x$, dass die Aussage $x$ falsch ist, bedeutet die Formel $x$ in intuitionistischer Logik, dass die Aussage $x$ beweisbar ist, und die Formel $\neg x$, dass die Aussage $x$ widerlegbar ist. Dies hat zur Folge, dass das in der klassischen Logik gültige Prinzip "tertium non datur", dass $x \vee \neg x$ immer wahr ist, in der intuitionistischen Logik nicht gilt. Wenn man $x$ nicht beweisen kann, reicht das nicht aus, um daraus zu schließen, dass $x$ widerlegt werden kann, und wenn man $x$ nicht widerlegen kann, reicht das nicht aus, um daraus zu schließen, dass $x$ bewiesen werden kann. Dies macht das Rechnen mit den intuitionistischen Logiken sehr verschieden von der klassischen Logik. Einige Formeln, die in der klassischen Logik gültig sind, sind in den intuitionistischen Logiken nicht beweisbar. Wieder verwende ich den Plural, weil es verschiedene Arten von intuitionistischer Logik gibt, wie etwa intuitionistische Modallogiken.

## Weitere Logiken

Es gibt noch viele weitere Arten von Logiken, zum Beispiel temporale, substrukturale oder mehrwertige Logiken. Ein Beispiel für mehrwertige Logiken ist die berühmte Fuzzy-Logik. In diesen Logiken gibt es nicht nur die Wahrheitswerte wahr und falsch, sondern viele verschiedene Wahrheitswerte. Dies macht das Rechnen deutlich schwieriger.

## Summa summarum

Ich hoffe, mit diesem Artikel einen kleinen Einblick in die mathematische Logik gegeben zu haben. Zur Erweiterung des Wissens über Logik empfiehlt sich der Besuch von einschlägigen Lehrveranstaltungen an den Universitäten, zum Beispiel von der Vorlesung *Logic and Computability* an der TU Wien.

## Habt ihr es verstanden?

Zum Schluss noch eine Übungsaufgabe, mit der der geneigte Leser testen kann, ob er den Inhalt dieses Artikels begriffen hat. Es geht um die Modallogik: Man zeige, dass die Formel $A \to \Box\Diamond A$ symmetrische Beziehungen charakterisiert, das sind Beziehungen $R$, für die gilt, dass eine Welt $w$ genau dann mit einer Welt $v$ in Beziehung $R$ steht, wenn auch $v$ mit $w$ in Beziehung $R$ steht. Den Sachverhalt, dass eine Welt $w$ mit einer anderen Welt $v$ in Beziehung $R$ steht, kann man kurz durch $R(w, v)$ ausdrücken.

Zwei der Lösung dienliche Hinweise: Erstens: Man stelle sich $w$ und $v$ als zwei mögliche Welten vor, wobei in Welt $w$ die Formel $A$ gültig ist. Zweitens: Dass eine Formel einen bestimmten Sachverhalt charakterisiert, bedeutet, dass diese Formel genau dann gültig ist, wenn dieser Sachverhalt vorliegt.

Viel Spaß beim Knobeln - und nicht traurig sein, wenn es schwerfällt: Das ist immerhin eine Übungsaufgabe auf dem Niveau der TU Wien (Masterstudium Computational Intelligence) und kein IQ-Test.

## Lösung

1. Die Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ bedeutet: Wenn in einer Welt $w$ die Formel $A$ gilt, dann gilt in jeder Welt $v$ die Formel $\Diamond A$, wenn $w$ mit $v$ in Beziehung $R$ steht, und wenn in $v$ die Formel $\Diamond A$ gilt, gibt es eine Welt $u$, in der die Formel $A$ gilt, so dass $v$ mit $u$ in Beziehung $R$ steht. Es gilt also $R(w, v)$ und $R(v, u)$. Wenn wir $w$ mit $u$ gleichsetzen, ist die Beziehung $R$ symmetrisch und die modallogische Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ erfüllt, ergo ist in jeder symmetrischen Beziehung die Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ gültig.

2. Die andere Richtung kann indirekt bewiesen werden, indem man zeigt, dass in dem Fall, dass eine Beziehung nicht symmetrisch ist, die Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ nicht erfüllt wird. Wie gesagt, gilt $R(w, v)$ und $R(v, u)$. Wenn die Beziehung nicht symmetrisch ist, müssen $w$ und $u$ verschieden sein. Entweder gibt es also keine Welt $u$, in der die Formel $A$ gilt, so dass eine andere Welt $v$ mit ihr in Beziehung $R$ steht; in diesem Fall ist die modallogische Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ nicht erfüllt. Oder aber es gibt ein solches $u$, aber es ist von $w$ verschieden. In diesem Fall gibt es aber eine Welt $v'$, zu der $u$ in Beziehung $R$ steht, usw. Letzten Endes muss es also ein Knotenpaar $w_i, v_i$ geben, für das sowohl $R(w_i, v_i)$ als auch $R(v_i, w_i)$ gilt, sonst kann die Formel $A \rightarrow \Box\Diamond A$ nicht erfüllt werden. (Zur Veranschaulichung dieses Arguments: Wenn man einer Schlange erlaubt, plötzlich grenzenlos zu wachsen, dann wird sie sich zwangsläufig in den eigenen Schwanz beißen. Denn das Universum ist zu jedem Zeitpunkt endlich.) Daher ist jede Beziehung, die $A \rightarrow \Box\Diamond A$ erfüllt, symmetrisch.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com