MATHEMATIQ

Der Newsletter der MathSIG
(Interessensgruppe innerhalb der Mensa Österreich)

Ausgabe 4

http://www.hugi.scene.org/adok/mensa/mathsig/

Editorial

Liebe Leserinnen und Leser!

Dies ist die vierte Ausgabe von MATHEMATIQ, dem Newsletter der MathSIG. Die MathSIG wurde gegründet, um die spezifischen Interessen mathematisch hochbegabter Menschen zu fördern. In erster Linie soll sie sich also den Themengebieten Mathematik, Informatik, Physik und Philosophie widmen. Beiträge von Lesern sind herzlich willkommen. Wenn in ihnen mathematische Sonderzeichen vorkommen, bitte ich aber, sie zwecks möglichst einfacher und fehlerfreier Formatierung im TeX-Format einzusenden. Als Vorlage ist eine Fassung des jeweils aktuellen Newsletters im TeX-Format auf Anfrage bei mir erhältlich. Außer Artikeln sind natürlich auch Illustrationen für das Titelblatt willkommen. Die Rechte an diesen müssen aber eindeutig bei euch selbst liegen, Kopieren von Bildern aus dem Internet ist nicht erlaubt.

Diese Ausgabe ist den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen gewidmet.

In diesem Sinne: Viel Spaß beim Lesen und Lernen!

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Gödel und die Grenzen der Berechenbarkeit

Kurt Gödel zeigte in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, dass ein formales System (also eine formale Sprache), in dem sich mathematische bzw. logische Aussagen darstellen lassen, entweder unvollständig oder inkonsistent sein müsse (Erster Unvollständigkeitssatz). Ferner behauptete er, aus der Konsistenz eines formalen Systems folge, dass dieselbe nicht innerhalb dieses formalen Systems beweisbar sei (Zweiter Unvollständigkeitssatz).

Man kann beide Sätze leicht mit Hilfe der Berechenbarkeitstheorie (wie in den Artikeln über formale Sprachen in den vergangenen Ausgaben beschrieben) herleiten, wenn man bedenkt, dass Vollständigkeit im Prinzip bedeutet, dass jede Aussage entscheidbar sein muss, und Konsistenz, dass immer dann, wenn von dem mit dem formalen System assoziierten Mechanismus (zum Beispiel von einer Turing-Maschine) eine Aussage als beweisbar betrachtet wird, diese Aussage logisch betrachtet tatsächlich beweisbar sein muss, und wenn sie nicht als beweisbar betrachtet wird, dann nicht. Paradoxe Aussagen, bei denen die Annahme, dass sie beweisbar seien, zu der Konklusion führt, dass sie nicht beweisbar sein könnten, und die umgekehrte Annahme, dass sie nicht beweisbar seien, zu der Konklusion führt, dass sie beweisbar sein müssten, können von einem konsistenten System nicht entschieden werden. Daher sind konsistente Systeme nicht vollständig, und diese Aussage ist logisch äquivalent zu der Aussage, dass vollständige Systeme nicht konsistent sein können.

Der Zweite Unvollständigkeitssatz im Speziellen lässt sich zeigen, indem man argumentiert, dass eine formale Sprache in Gödels Sinne zumindest rekursiv aufzählbar sein muss, aber nicht rekursiv sein darf, wenn sie konsistent sein soll; denn rekursive Sprachen können nicht konsistent sein, weil die Zugehörigkeit jeder Aussage entscheidbar sein muss, aber Paradoxien eben nicht entscheidbar sind. Das Problem festzustellen, ob es eine Aussage gibt, deren Zugehörigkeit nicht entscheidbar ist, ist wiederum jedoch selbst nicht entscheidbar.

Interessant ist das vor allem, wenn man sich fragt, wo die Grenzen der Berechenbarkeit durch ein Computersystem liegen. Gödel selbst vertrat die Meinung, der menschliche Geist wäre viel mächtiger als jedes Computersystem, weil er Dinge berechnen könne, die ein Computer nicht berechnen kann. Tatsächlich ist ein Mensch ja durchaus in der Lage zu erkennen, dass eine Aussage paradox ist, während eine Turing-Maschine, die feststellen soll, ob eine Aussage beweisbar ist, entweder ein falsches Ergebnis liefern oder in eine Endlosschleife geraten würde. Die Frage ist jedoch, ob man nicht auch eine Turing-Maschine so programmieren könnte, dass sie in der Lage wäre festzustellen, ob eine Aussage paradox ist. Wir müssten dann zwei verschiedene Entscheidungsprobleme - also im Prinzip zwei verschiedene formale Sprachen - berücksichtigen: einerseits das Problem, ob eine Aussage paradox ist, und andererseits das Problem, ob eine (nicht-paradoxe) Aussage beweisbar ist. Natürlich ist das allgemeinere Problem, ob eine Aussage entscheidbar ist, selbst nicht entscheidbar, weil es ja gleichbedeutend ist mit dem so genannten Halteproblem, also dem Problem, ob eine Turing-Maschine, wenn sie mit bestimmten Eingabedaten gefüttert wird, terminiert oder sich in einer Endlosschleife aufhängt. Das betrifft aber die Entscheidbarkeit allgemein. Paradoxe Aussagen sind eine spezielle Teilmenge der Menge von Aussagen, deren Beweisbarkeit nicht entschieden werden kann. Vielleicht wäre es zumindest für diese Teilmenge möglich, einen Computer entsprechend zu programmieren - ich sehe jedenfalls keinen Grund, warum es nicht möglich sein sollte.

Im Studienplan *Computational Intelligence* der TU Wien stand im übrigen früher: "Die zugrunde liegende Hypothese dabei ist, dass intelligentes Schließen letztlich nichts anderes als eine Art von Berechnung (Computation) ist." Wenn diese Hypothese richtig ist, folgt daraus, dass ein Computer in der Lage wäre, genauso intelligent zu schließen wie ein Mensch, wenn alles, was das menschliche Gehirn berechnen kann, auch von einem Computer berechnet werden kann. Gödel bezweifelte das - ob er Recht hatte, kann man derzeit noch nicht sagen, und wenn er wirklich Recht haben sollte, wird man es vielleicht auch nie sagen können (denn es ist unendlich schwieriger zu beweisen, dass etwas nicht möglich ist, als zu beweisen, dass es möglich ist - siehe *P*-*NP*-Problem).

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Wie geht es weiter?

Ich habe die MathSIG gegründet, weil ich gerne über mathematische Themen (vor allem solchen, die mit meinem Studium der Theoretischen Informatik zu tun haben; die Theoretische Informatik wird manchmal als Teilbereich der Mathematik betrachtet) schreiben wollte und in der offiziellen Vereinszeitschrift von Mensa Österreich, TOPIQ, für diese Themen nur begrenzt Platz vorhanden ist. Nun bin ich bis jetzt alleiniger Autor geblieben, obwohl ich auch andere zum Schreiben eingeladen habe. Vielleicht haben andere Mensaner halt nicht dieses Bedürfnis wie ich, über Mathematik zu schreiben. Da aber auch wenige Rückmeldungen zu den Artikeln kommen, ist fraglich, ob sie überhaupt an den Themen Interesse haben. Es könnte sein, dass für manche Leser das Niveau zu hoch, für andere zu niedrig ist oder die Themen die Leute einfach nicht ansprechen. Wie auch immer, ich schreibe gerne über Dinge, von denen ich Ahnung habe, und sehe keine andere Möglichkeit als diesen Newsletter MATHEMATIQ, wo ich solche Artikel veröffentlichen könnte. Deshalb wird es wahrscheinlich trotz allem noch weitere Ausgaben von MATHEMATIQ geben. Aber es ist natürlich irgendwie autistisch, wenn jemand der einzige Autor und gleichzeitig offenbar auch der einzige Leser ist.

Ich hatte eigentlich erwartet, dass der IQ stark mit der mathematischen Begabung zusammenhängt und jeder Mensaner mathematisch begabt wäre. Aber im Lauf der Jahre, in denen ich schon bei Mensa Mitglied bin, hat sich gezeigt, dass dem nicht so ist. Manche Mensaner waren in der Schule in Mathematik schlecht oder sind einfach desinteressiert. Vielleicht ist Mensa auch das falsche Publikum für eine Publikation wie diese. Theoretisch ist diese Publikation aber nicht auf ein Mensa-Publikum beschränkt, weil sie frei im Internet heruntergeladen werden kann. Man müsste nur an den richtigen Orten Werbung machen. Darum werde ich mich bemühen.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com