MATHEMATIQ

Der Newsletter der MathSIG
(Interessensgruppe innerhalb der Mensa Österreich)

Ausgabe 2.2

http://www.hugi.scene.org/adok/mensa/mathsig/

Editorial

Liebe Leserinnen und Leser!

Dies ist die zweite Ausgabe von MATHEMATIQ, dem Newsletter der MathSIG. Die MathSIG wurde gegründet, um die spezifischen Interessen mathematisch hochbegabter Menschen zu fördern. In erster Linie soll sie sich also den Themengebieten Mathematik, Informatik, Physik und Philosophie widmen. Beiträge von Lesern sind herzlich willkommen. Wenn in ihnen mathematische Sonderzeichen vorkommen, bitte ich aber, sie zwecks möglichst einfacher und fehlerfreier Formatierung im TEX-Format einzusenden. Als Vorlage ist eine Fassung des jeweils aktuellen Newsletters im TEX-Format auf Anfrage bei mir erhältlich. Außer Artikeln sind natürlich auch Illustrationen für das Titelblatt willkommen. Die Rechte an diesen müssen aber eindeutig bei euch selbst liegen, Kopieren von Bildern aus dem Internet ist nicht erlaubt.

Diese Ausgabe ist den formalen Sprachen gewidmet. Die dazu gehörige Artikelserie wird sich über mehrere Ausgaben erstrecken. Außerdem enthält diese Ausgabe noch einige weitere Artikel, wie etwa meine persönlichen Erfahrungen zum Thema "Hochbegabte in der Wissenschaft".

Da ich im Laufe der Zeit einige Fehler im Artikel über formale Sprachen fand, entschloss ich mich knapp zwei Monate nach Erscheinen dieser Ausgabe, eine korrigierte Neuauflage zu veröffentlichen.

In diesem Sinne: Viel Spaß beim Lesen und Lernen!

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Formale Sprachen

Formale Sprachen sind eines meiner liebsten Themengebiete der theoretischen Informatik. Ich möchte gleich zu Beginn erwähnen, dass ich besonders viel über die theoretische Informatik gegen Ende meines Studiums gelernt habe, als ich neben der Arbeit an meiner Diplomarbeit die Gelegenheit hatte, die Vorlesung *Advanced Topics in Theoretical Computer Science* zu besuchen. Diese wurde an der TU Wien einige Jahre lang jedes Wintersemester von Frau Privatdozent Dr. Laura Kovacs gehalten und war aus didaktischer Sicht eine der besten Lehrveranstaltungen von allen, die ich im Studium hatte: Der Stoff wurde sehr verständlich und nachvollziehbar erklärt, kein Schritt wurde ausgelassen. Aus Sicht der Wiener Studierenden ist es schade, dass die Vortragende inzwischen nach Schweden übersiedelt ist. Andererseits ist das natürlich gut für die Studierenden in Schweden!

Unter einer formalen Sprache versteht man grundsätzlich eine Menge von Wörtern. Diese Menge kann endlich oder unendlich groß sein. Formale Sprachen lassen sich, wenn sie endlich sind, durch Aufzählung aller Wörter spezifizieren. Wenn sie hingegen unendlich sind, ist das nicht möglich. Wie kann man unendliche formale Sprachen definieren? Man benötigt dazu einen Formalismus. Welche Art von Formalismus, hängt davon ab, um welche Art von Sprache es sich handelt. Leider ist kein Formalismus bekannt, mit dem sich eine beliebige Sprache spezifizieren ließe. Aber für spezielle Mengen von Sprachen gibt es spezielle, elegante Formalismen.

Die Mengen der formalen Sprachen bilden jedenfalls eine Hierarchie. Diese wird, nach dem amerikanischen Linguisten Noam Chomsky, auch Chomsky-Hierarchie genannt. Hierarchie bedeutet in diesem Fall, dass in der Hierarchie höher stehende Sprachen echte Teilmengen von in der Hierarchie niederer angeordneten Sprachen sind. Insgesamt gelten folgende Beziehungen:

Reguläre Sprachen
$\subset$ Kontextfreie Sprachen
$\subset$ Kontextsensitive Sprachen
$\subset$ Rekursive Sprachen
$\subset$ Rekursiv aufzählbare Sprachen
$\subset$ Allgemeine Sprachen

Zusätzlich gilt noch:

Rekursive Sprachen
$\subset$ Co-rekursiv aufzählbare Sprachen
$\subset$ Allgemeine Sprachen

Tatsächlich ist die Menge der rekursiven Sprachen die Schnittmenge der Mengen der rekursiv und der co-rekursiv aufzählbaren Sprachen. Was dies alles nun konkret bedeutet, ist Thema des Rests dieses Artikels.

Zu der Menge der regulären Sprachen gehören zunächst alle endlichen Sprachen, also Sprachen, die nur aus einer endlichen Zahl von Wörtern bestehen. Darüber hinaus zählen aber auch Sprachen, in denen es erlaubt ist, Teile eines Wortes beliebig oft zu wiederholen, zu den regulären Sprachen.

Reguläre Sprachen können durch reguläre Ausdrücke beschrieben werden. Ein regulärer Ausdruck ist eine Zeichenkette, die außer Literalen (also Zeichen, die zum Wort gehören) auch Klammern und zwei verschiedene Sonderzeichen enthalten kann. Das eine Sonderzeichen wird meist mit dem Plussymbol, das andere mit dem Malsymbol dargestellt. Das Plussymbol bedeutet, dass der vorangehende Teil des Wortes auch weggelassen werden darf. Somit würde etwa der reguläre Ausdruck *ab+c* für die beiden Wörter *ac* und *abc* stehen. Das Pluszeichen bezieht sich normalerweise auf das vorausgehende Literal, außer es wurden mehrere Literale durch eine Klammer zusammengefasst - dann bezieht es sich auf den eingeklammerten Wortteil. Der reguläre Ausdruck *a(bc)+d* stünde beispielsweise für die Wörter *ad* und *abcd*. Mit dem Malzeichen verhält es sich ähnlich, nur hat es eine andere Bedeutung: Ein mit dem Malzeichen markierter Wortteil kann beliebig oft wiederholt werden. Durch den Ausdruck *a(bc)*d* würde also eine unendliche Wortmenge erzeugt werden, bestehend aus den Wörtern *ad*, *abcd*, *abcbcd*, *abcbcbcd*, *abcbcbcbcd* usw.

Jetzt wird sich mancher Leser vielleicht fragen: Was hat das denn mit Informatik zu tun? Die Bedeutung der formalen Sprachen für die Informatik besteht darin, dass man jede formale Sprache als ein Entscheidungsproblem betrachten kann: Gehört ein bestimmtes Wort zu der jeweiligen formalen Sprache oder nicht? Die Zugehörigkeit zu bestimmten Mengen formaler Sprachen lässt sich durch bestimmte Berechnungsmodelle entscheiden. Sozusagen von theoretischen Formalismen, die im Prinzip das Verhalten von Computern modellieren. Dabei gilt grundsätzlich, dass jedes Entscheidungsproblem, das ein moderner Computer (wie etwa der, vor dem ihr jetzt gerade sitzt, falls ihr MATHEMATIQ auf eurem Bildschirm lest) lösen kann, auch von einer Turing-Maschine gelöst werden könnte, und umgekehrt. Mit einer Turing-Maschine lässt sich aber nicht jede denkbare Sprache entscheiden - bei rekursiv aufzählbaren Sprachen ist Schluss. Für allgemeinere Sprachen ist kein allumfassender Formalismus bekannt. - Ich werde im weiteren Verlauf dieses Artikels noch zu den Turing-Maschinen kommen. Nun aber erst einmal zu den regulären Sprachen.

Reguläre Sprachen lassen sich durch endliche Automaten modellieren. Ein Automat ist eine Menge von Zuständen mit definierten Übergängen. Ein bestimmter Zustand ist der Startzustand, und es muss mindestens einen Endzustand geben. Wenn ein Automat ausgeführt wird, beginnt er beim Startzustand. Dann wird das erste Literal des Eingabeworts gelesen. Wenn es vom aktuellen Zustand einen Übergang gibt, der dieses Literal akzeptiert, dann kann man auf diese Weise in einen nächsten Zustand gelangen. Falls nein, muss die Ausführung abgebrochen werden. Ein Wort gilt dann als Element der gegebenen formalen Sprache, wenn alle Buchstaben in der gegebenen Reihenfolge akzeptiert wurden und auf diese Weise ein Endzustand erreicht wurde. Man beachte: Es muss von einem Zustand nicht nur einen einzigen

Übergang zu einem anderen Zustand geben, der ein bestimmtes Literal akzeptiert. Es ist auch möglich, dass man mit einem Literal verschiedene Zustände erreichen könnte. Wenn das so ist, spricht man von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten. Wenn man einen solchen Automaten benutzt, um zu überprüfen, dass ein bestimmtes Wort in der gegebenen formalen Sprache enthalten ist, dann darf man bei Abbruch der Ausführung nicht gleich schließen, dass das Wort in der Sprache nicht enthalten wäre. Es könnte sehr wohl enthalten sein. Schlimmstenfalls muss man alle möglichen "Pfade" durchprobieren. Anders ist das bei deterministischen endlichen Automaten: Diese enthalten nur jeweils einen einzigen Übergang pro Zustand und Literal. Somit genügt es, einen deterministischen endlichen Automaten einmal auszuführen, um ein Entscheidungsproblem zu lösen. Wie der intelligente Leser nun vermuten könnte, sind deterministische endliche Automaten in der Regel um Einiges komplexer als nichtdeterministische: Sie enthalten mehr verschiedene Zustände. Kann man jedes Entscheidungsproblem durch einen deterministischen endlichen Automaten modellieren? Ja, man kann: Es ist bewiesen worden, dass man zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automat auch einen deterministischen endlichen Automaten angeben kann, der die gleiche Sprache akzeptiert. Da jeder deterministische endliche Automat im Prinzip auch ein nichtdeterministischer endlicher Automat ist, gilt auch die umgekehrte Aussage. Deterministische und nichtdeterministische endliche Automaten sind in ihrer Expressivität gleichwertig. In vielen Fällen ist es aber leichter, einen nichtdeterministischen endlichen Automaten zu entwickeln, der eine bestimmte Sprache akzeptiert.

Die nächsttiefere Hierarchie-Ebene wird von den kontextfreien Sprachen eingenommen. Das sind Sprachen, die durch kontextfreie Grammatiken spezifiziert werden können. Zur Angabe kontextfreier Grammatiken wurden verschiedene Notationen entwickelt, eine der bekanntesten davon ist die *Erweiterte Backus-Naur-Form (EBNF)*. Diese hat folgende Syntax:

Regel → *Literal* Regel* Literal**

Dabei ist mit dem Malsymbol wiederum gemeint, dass das vorangehende Element - also entweder ein (beliebiges) Literal oder eine (beliebige) Regel - beliebig oft wiederholt oder auch weggelassen werden kann. Möglich sind also Regeln wie

$A \rightarrow abc$,

wodurch definiert würde, dass jedesmal, wenn die Regel A vorkommt, diese durch die Zeichenkette *abc* ersetzt werden kann, aber auch Regeln wie etwa

$A \rightarrow a\ B\ de$,
$B \rightarrow B\ c$,

welche die Bedeutung hätten, dass B durch beliebig viele Literale c ersetzt werden könnte und A durch das Literal a, gefolgt von der Regel B und den Literalen *de*. Was das von den regulären Sprachen unterscheidet, ist, dass für jede Regel mehrere Möglichkeiten definiert werden können. Es gilt folgende Kurzschreibweise:

$A \rightarrow B|C$

ist gleichbedeutend mit

$A \rightarrow B$,
$A \rightarrow C$.

Man kann sich also aussuchen, welche Möglichkeit man anwendet, und kann dadurch Sprachen beschreiben, die sich durch reguläre Ausdrücke nicht definieren ließen. Zum Beispiel: Die kontextfreie Grammatik

$A \rightarrow a\ A\ b|\epsilon$,

wobei ϵ das leere Wort bedeutet, gestattet es, folgende Wörter zu bilden: ϵ, *ab*, *aabb*, *aaabbb* usw. Es gibt keinen regulären Ausdruck, durch den sich diese Sprache beschreiben ließe. Daher handelt es sich nicht um eine reguläre, sondern um eine kontextfreie Sprache.

Das war der erste Teil dieses Artikels. Da das bisher Besprochene bereits relativ viel und nicht gerade anspruchslos war, möchte ich an dieser Stelle vorerst Schluss machen, um euch Gelegenheit zu geben, das Gelernte zu verdauen. Die Fortsetzung folgt in der nächsten Ausgabe von MATHEMATIQ.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Formale Parameter

Unser langjähriges Mensa-Mitglied Konstanze Kobel-Höller betreibt die Website `http://www.tate.at`, die sich mit den Problemen und Bedürfnissen hochbegabter Kinder und derer Eltern beschäftigt. Auf dieser Website gibt es eine Rubrik namens "Dumm und dümmer", in der über Fehltritte mancher Lehrer im Umgang mit diesen Kindern berichtet wird. Einer der dort befindlichen Berichte lautet wie folgt:

"Meinem Sohn wurde der Aufstieg in die fünfte Schulstufe in Mathematik verweigert, weil er - unter anderem - nicht wusste, dass die Lösung für das mathematische Problem mit zwei Schachteln mit je drei Dingen darin 2x3 und nicht 3x2 ist."

Das ist aber nicht ganz ohne Grund. Natürlich ist die Multiplikation kommutativ, so dass $2 * 3$ denselben Wert liefert wie $3 * 2$. Aber wie ist die Multiplikation denn definiert? Der erste Parameter der Multiplikation ist der Multiplikator, der zweite Parameter der Multiplikand. Wer Latein gelernt hat, weiß, dass der Multiplikand die Zahl ist, die mit dem Multiplikator zu multiplizieren ist. Der Multiplikand ist also das direkte Objekt im vierten Fall (ich multipliziere *den* Multiplikanden) und der Multiplikator das indirekte Objekt im (aus Sicht des Lateinischen) sechsten Fall (ich multipliziere *mit dem* Multiplikator). Die drei Dinge sind das direkte Objekt, die zwei Schachteln das indirekte Objekt. Daher lautet die Rechnung $2*3$ und nicht umgekehrt.

Natürlich macht es wegen des Kommutativgesetzes in der Praxis keinen Unterschied, ob man die Reihenfolge der Parameter einhält oder nicht, aber rein formal gesehen hatte der Lehrer Recht.

Ich räume aber selbst ein, dass ich es für übertrieben halte, wenn man solchen Formalitäten zu viel Beachtung schenkt, obwohl das richtige Ergebnis herausgekommen ist (und sich auch begründen lässt, warum das Ergebnis richtig sein muss, es sich also nicht einfach um einen reinen Zufallstreffer handelt). Leider musste ich im Studium selbst die Erfahrung machen, dass es manchen Lehrenden sehr wichtig ist, dass man formal korrekt vorgeht. Es stellt sich die Frage, ob das nicht den unerwünschten Seiteneffekt hat, dass dadurch die Kreativität - und somit die Wahrscheinlichkeit, zu neuen Lösungsansätzen zu gelangen, was vor allem bei der Lösung noch offener Probleme wissenschaftlich relevant sein kann - gehemmt werden könnte. Was meint ihr dazu?

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Vortrag: Automated Reasoning

Am 4. Juni 2013 hielt Christoph Weidenbach vom Max-Planck-Institut für Informatik in Saarbrücken, Deutschland, an der TU Wien einen Vortrag zum Thema "Design of Automated Reasoning Systems". Das war auch eines der Themen, mit denen ich mich in meinem Studium beschäftigt habe.

Konkret stellte er vor allem den Algorithmus CDCL (Conflict Driven Clause Learning) vor, der eine Alternative zum bekannteren, häufig benutzten Algorithmus DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland) darstellt. Beide Algorithmen dienen dazu, aussagenlogische Formeln auf ihre Gültigkeit zu überprüfen, und können vom Computer ausgeführt werden (deswegen *Automated* Reasoning). Über DPLL könnte ich bei Interesse einen Artikel schreiben; das wäre eine gute Fortsetzung zu dem Logik-Artikel aus MATHEMATIQ Ausgabe 1.

Außerdem ging der Vortragende auf eine Variante der Prädikatenlogik ein, die auch Aussagen in der Sprache der linearen Arithmetik zulässt. Diese Sprache sei seiner Meinung nach äußerst mächtig und ebenfalls eines der Forschungsgebiete seines Instituts.

Dem etwa eine Stunde dauernden Vortrag wohnten insgesamt 18 Personen bei, darunter vier Professoren der Fakultät für Informatik der TU Wien.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com

Hochbegabte in der Wissenschaft

Ich habe neulich viele alte Ausgaben unserer Vereinszeitschrift gelesen und festgestellt, dass es eine Menge Artikel gegeben hat, die sich mit dem Thema Intelligenz beziehungsweise Hochbegabung beschäftigt haben. Mir ist dabei aber aufgefallen, dass keiner der Artikel der Beziehung zwischen Hochbegabung und wissenschaftlichem Arbeiten gewidmet war. Der folgende Artikel ist eine kurze Stellungnahme zu diesem Thema.

In unserer Gesellschaft ist es verbreitet, Wissenschaftlern, insbesondere Naturwissenschaftlern, einen besonders hohen Intelligenzgrad zuzuschreiben. Vor allem Genies wie Einstein, die etwas Neues entdeckt oder erfunden haben, das relativ weitreichende Konsequenzen für verschiedene Aspekte des menschlichen Lebens gehabt hat, wird ein äußerst hoher Intelligenzquotient beigemessen. Dass man eine hohe Intelligenz braucht, um in die Forschung zu gehen bzw. in der Forschung erfolgreich zu sein, rechtfertigt aber, rein logisch betrachtet, nicht die Forderung, dass alle besonders Begabten in die Forschung gehen sollten.

Wenn man sich ansieht, was hier in Österreich unter dem Stichwort "Begabtenförderung" angeboten wird, dann liegt der Schwerpunkt, soweit ich Einblick habe, eindeutig in den Naturwissenschaften. Der Verein Science Pool VIF beispielsweise, der von einigen ehemaligen Mensa-Mitgliedern gegründet wurde, bietet sozusagen "Nachhilfeunterricht" auf hohem Niveau in Physik, Chemie, Mathematik und verwandten Gebieten an. So gesehen, hätte eigentlich jeder erwachsene Hochbegabte, der nicht in einem naturwissenschaftlichen Bereich arbeitet, seinen Beruf verfehlt. In der Realität arbeiten aber viele Hochbegabte nicht in den Naturwissenschaften, sondern in anderen Bereichen.

Wenn so viele Hochbegabte nicht in der Forschung tätig sind, was ist da schief gelaufen? Wurden die Hochbegabten vielleicht nicht rechtzeitig als hochbegabt erkannt und deswegen im langwierigen Selektionsprozess, den unser Bildungssystem darstellt, vorzeitig "aussortiert"? Oder ist es vielleicht zum Teil auch so, dass die Hochbegabten sich einfach nicht für diese Dinge interessiert haben, von denen normale Leute glauben, dass sie für Hochbegabte besonders reizvoll wären? Vielleicht ist auch einfach die Nachfrage an hochbegabten Mitarbeitern in der Wissenschaft gar nicht so groß, wie in den Medien immer behauptet wird. Gerade letztere Möglichkeit erscheint mir sehr plausibel.

An den Universitäten hat mich jedenfalls niemand je nach meinem Intelligenzquotienten gefragt.

Insgesamt bin ich der Meinung, dass extrem Hochbegabte in erster Linie für theoretische Arbeiten geeignet wären, wie etwa, neue Hypothesen und Erklärungsmodelle zu entwickeln und sie auf logische Konsistenz zu überprüfen.

Jedenfalls meine ich, dass die Forderung, alle Hochbegabten sollten in die Forschung gehen, nicht gerechtfertigt ist. Eine wissenschaftliche Karriere sollte man meiner Meinung nach allenfalls dann anstreben, wenn einen ein bestimmter Wissenschaftszweig wirklich interessiert. Ich halte auch die Annahme für gerechtfertigt, dass ohnehin nur die, die wirklich Interesse an einem bestimmten Fach haben, in der Wissenschaft etwas im positiven Sinne Weltbewegendes erreichen könnten. Alle Anderen sollten, unabhängig von der Begabung, einfach den Beruf anstreben, von dem sie glauben, dass er sie glücklich machen würde, und ihr Leben, soweit möglich, genießen.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com