Zum Beweis der Nichtexistenz

Wie ich bereits mehrmals geschrieben habe, halte ich das *P*-*NP*-Problem deswegen für besonders schwierig, weil wahrscheinlich $P \neq NP$ gilt und es aber sehr viel schwieriger ist zu beweisen, dass etwas nicht gilt, als das Gegenteil zu beweisen. Denn dass etwas nicht gilt, ist gleichbedeutend damit, dass etwas nicht existiert, und wie soll man beweisen, dass etwas nicht existiert?

Nehmen wir das bekannte Raben-Beispiel: Die Aussage "Alle Raben sind schwarz" ist logisch äquivalent zur Aussage "Es existiert nichts, das ein Rabe und zugleich nicht schwarz ist". Das kann man in der Sprache der Aussagenlogik so ausdrücken:

$\neg\exists x R(x) \land \neg s(x)$.

Diese Aussage ist logisch äquivalent zur Aussage

$\forall x \neg s(x) \rightarrow \neg R(x)$.

Zum Beweis formen wir die Aussage Schritt für Schritt um:

$\neg\exists x R(x) \land \neg s(x)$
$\equiv \forall x \neg(R(x) \land \neg s(x))$
$\equiv \forall x \neg R(x) \lor s(x)$
$\equiv \forall x R(x) \rightarrow s(x)$ (das ist die direkte Übersetzung von "Alle Raben sind schwarz")
$\equiv \forall x \neg s(x) \rightarrow \neg R(x)$.

Bei dieser Umformung haben wir zuerst davon Gebrauch gemacht, dass jede Existenzaussage über einen Term A eine negierte Allaussage über Nicht-A darstellt, dann davon, dass eine negierte Konjunktion äquivalent ist zu einer Disjunktion der Negationen der Einzelaussagen, dann von der Möglichkeit, Implikationen als Disjunktionen auszudrücken und zum Schluss von der Tatsache, dass die so genannte Kontraposition einer Implikation zu dieser logisch äquivalent ist.

Daraus ergibt sich, dass wir die Aussage "Alle Raben sind schwarz" beweisen könnten, wenn wir alle nicht-schwarzen Objekte kennten und zeigen könnten, dass es sich bei keinem von ihnen um einen Raben handelt.

Im Fall des *P*-*NP*-Problems lautet die zu beweisende Aussage: "Es gibt kein *NP*-vollständiges Problem, das Element der Menge *P* ist." Diese Aussage könnte also bewiesen werden, wenn es möglich wäre, alle Probleme, die Elemente der Menge *P* sind, aufzuzählen und für jedes dieser Probleme zu zeigen, dass es nicht *NP*-vollständig ist. Die Aussage $P \neq NP$ könnte auch bewiesen werden, wenn man eine Eigenschaft fände, die allen Problemen in *P* inhärent ist, aber die kein *NP*-vollständiges Problem aufweist.

Darüber hinaus sollte man aber nicht vergessen, dass es gar nicht notwendig ist, eine zu $P \neq NP$ logisch äquivalente Aussage zu beweisen, um $P \neq NP$ zu beweisen. Es ist auch möglich, $P \neq NP$ zu beweisen, indem man eine Aussage beweist, die $P \neq NP$ impliziert. Eine solche Aussage zu finden, erfordert freilich ein wenig Kreativität.

Wenn wir uns die Aussage

$\forall x \neg s(x) \rightarrow \neg R(x)$

ansehen, dann ist jedenfalls klar, dass gilt:

$(\forall x \neg R(x)) \rightarrow (\forall x \neg s(x) \rightarrow \neg R(x))$.

Im Kontext des *P*-*NP*-Problems würde dies bedeuten: Wenn es gar keine *NP*-vollständige Probleme gäbe, dann wäre bewiesen, dass kein Problem, das in *P* liegt, *NP*-vollständig sein kann. Das ist trivial und bringt uns nichts, denn wir wissen ja, dass es *NP*-vollständige Probleme gibt.

Wir müssten also eine wahre Aussage finden, die die zu beweisende Aussage impliziert. Wenn man das Problem aber nur aussagenlogisch betrachtet und nicht die Eigenschaften von Problemen in *P* und von *NP*-vollständigen Problemen berücksichtigt, wird man meines Erachtens keine finden. Wir müssen also auf jeden Fall untersuchen, was Elemente der Menge *P* sonst noch auszeichnet außer der trivialen Eigenschaft, dass sie in polynomieller Zeit in Bezug auf die Größe der Eingabedaten gelöst werden können.

Claus D. Volko, cdvolko@gmail.com